Μαθημα 2ο 6/10/2016

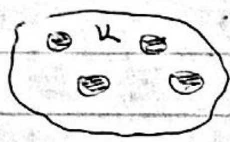
Πιθανοτητες

Πολ/κη Αρχη

Συνθετη διαδικασια

$$\Delta \begin{cases} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_\kappa \end{cases} \quad n = n_1 \times n_2 \times \dots \times n_\kappa \text{ τροποι}$$

Σχημα Κυψελες-Μπαλες



$\sqcup \quad \dots \quad \sqcup$

$1 \quad \dots \quad n \;\}\; n^\kappa$ τροποι

Παραδειγμα

Ζαρι ριχνεται → n φορες. Ποσα ειναι τα δυνατα αποτελεσματα?

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 \to 1^\eta \text{ ριψη} \to 6 \\ \Delta_2 \to 2^\eta \text{ ριψη} \to 6 \\ \vdots \\ \Delta_n \to n^\eta \text{ ριψη} \to 6 \end{array}\right\} \underbrace{6 \times 6 \times \dots \times 6}_{n-\text{φορες}} = 6^n \text{ τροποι}$$

⊕ Δυο ζαρια n-φορες;

$$\underset{\substack{\uparrow \\ 1^\eta}}{36} \times 36 \times \dots \times \underset{\substack{\uparrow \\ n^\eta}}{36} = 36^n \text{ φορες}$$

2 ζαρια
- 1º ζαρι → 1, 2, ..., 6
- 2º ζαρι → 1, 2, ..., 6

	1º ζαρι: 1	2	...	6
2º ζαρι: 1	(1,1)	(1,2)	...	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	...	(2,6)
⋮		(x,y) : $x = 1, \dots, 6$, $y = 1, \dots, 6$		
6	(6,1)	(6,2)	...	(6,6)

$(\alpha,\beta)=(\gamma,\delta) \Leftrightarrow \alpha=\gamma,\ \beta=\delta$

Μεταθεση - Διαταξη - Συνδυασμος

Μεταθεση: Ονομαζουμε μεταθεση n-διακεκριμενων στοιχειων καθε δυνατη τοποθετηση των n-στοιχειων σε γραμμη με μια συγκεκριμενη ταξη, σειρα.

π.χ

A, B, Γ ⟶ ΓΒΑ, ΑΒΓ, ΑΓΒ, ΒΑΓ, ΓΑΒ, ΒΓΑ } μεταθεσεις

↳ 3 διακεκριμενα στοιχεια με $A \neq B \neq \Gamma$

Διαταξη: Ονομαζουμε διαταξη n-διακεκριμενων στοιχειων ανα κ $(1 \leq \kappa \leq n)$: καθε δυνατη επιλογη κ-στοιχειων απο τα n και τοποθετηση των κ-στοιχειων σε γραμμη, σε σειρα

Διαταξη	Επιλογη κ-στοιχειων απο τα n ΚΑΙ Μεταθεση των κ-στοιχειων

π.χ

Α, Β, Γ 3 διακεκριμενα στοιχεια

Διαταξεις 3 ανα 2:

ΑΒ, ΒΑ, ΑΓ, ΓΑ, ΒΓ, ΓΒ

Παρατηρηση

Αν $n=k$ τοτε Μεταθεση = Διαταξη

Το πρωτο βημα μιας διαταξης

Συνδυασμος: Ονομαζουμε συνδυασμο n-διακεκριμενων στοιχειων ανα κ $(1 \leq k \leq n)$ καθε δυνατη επιλογη κ-στοιχειων απο τα n, χωρις να μας ενδιαφερει τοποθετηση των κ-στοιχειων σε γραμμη, σε σειρα

π.χ

Α, Β, Γ

Συνδυασμοι 3 ανα 2: ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ

Δεν μας ενδιαφερει η σειρα συνεπως: ΑΒ=ΒΑ, ΒΓ=ΓΒ, ΓΑ=ΑΓ

Διαταξη < Συνδυασμος ΚΑΙ Μεταθεση

Ερωτημα:

Ποσες δυνατες μεταθεσεις, διαταξεις, συνδυασμοι υπαρχουν;

⊕ Η επομενη προταση ειναι απαντηση του ερωτηματος

Προταση

α) Το πληθος των μεταθεσεων n-στοιχειων ειναι $n!$,
$n! \overset{\text{ορ}}{=} 1 \times 2 \times \ldots \times n$, $0! \overset{\text{ορ}}{=} 1$

β) Το πληθος των διαταξεων n-στοιχειων ανα κ συμβολιζεται $(n)_\kappa$ και ειναι $(n)_\kappa = \dfrac{n!}{(n-\kappa)!}$

γ) Το πληθος των συνδυασμων n-ανα-κ συμβολιζεται με $\binom{n}{\kappa}$ και ειναι $\binom{n}{\kappa} = \dfrac{n!}{\kappa! \cdot (n-\kappa)!}$

Παρατηρηση στην προταση

α) Διωνυμο του Νευτωνα

$$(x+y)^n = \sum_{\kappa=0}^{n} \binom{n}{\kappa} x^\kappa y^{n-\kappa}$$

β) Διαταξη = Συνδυασμος και Μεταθεση

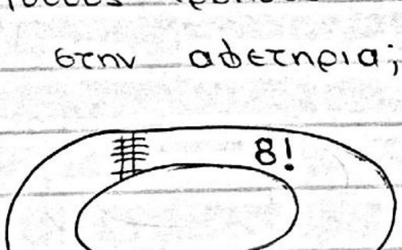
$\Delta \longrightarrow \Delta_1$ και Δ_2

πολ/κη αρχη

$$(n)_\kappa = \binom{n}{\kappa} \underset{(\text{επι})}{\times} \kappa!$$

Παραδειγμα 1

Με ποσους τροπους 8 δρομεις μπορουν να τοποθετηθουν στην αφετηρια;



Εφοσον εχω μεταθεση θα ειναι 8! τροποι

Βαζω τον εναν διπλα στον αλλον σε σειρα

παραδειγμα 2

Αρχικες πεντάδες δυο ομάδων μπασκετ και οι δυο διαιτητες;

A Δ B — $1^{ος}$ τροπος

$5! \times 2 \times 5!$

B Δ A — $2^{ος}$ τροπος

$5! \times 2 \times 5!$

Συνεπως εχουμε $5! \times 5! \times 2 \times 2$

παραδειγμα 3

5 ανδρες $\xrightarrow[\text{4-μελεις}]{\text{Επιτροπες}}$ 2 ανδρες και 2 γυναικες

4 γυναικες

Επιτροπη Δ

- Δ_1 → Επιλογη ανδρων → $\binom{5}{2}$
- Δ_2 → Επιλογη γυναικων → $\binom{4}{2}$

Αρα Δ → $\binom{5}{2} \times \binom{4}{2}$ τροποι

παραδειγμα 4

20 υποψηφιοι $\xrightarrow[\text{3-μελη}]{\text{Επιτροπη}}$ Πρ, Γραμ, Ταμ

(*) Τους μεταθετω γιατι εχει αλλη αξια ο προεδρος, ταμιας, γραμ.

Ποσες επιτροπες;

$$\underbrace{\binom{20}{3}^{(v)}}_{\text{συνδυασμος}} \times \underbrace{3!^{(*)}}_{\text{μεταθεση}} = \underbrace{(20)_3}_{\text{διαταξη}}$$

(v) πρεπει να διαλεξω 3 απο τους 20

$\Delta_1 \rightarrow$ προεδρος $\rightarrow$ 20
$\times$
$\Delta_2 \rightarrow$ γραμ. $\rightarrow$ 19
$\times$
$\Delta_3 \rightarrow$ ταμ $\rightarrow$ 18

$$\left.\begin{array}{l} 20 \times 19 \times 18 \end{array}\right\} = (20)_3 = \binom{20}{3} \times 3!$$

παραδειγμα 5

10 ερωτησεις
7 απαντησεις } Ποσες επιλογες;

Εχουμε συνδυασμο γιατι δεν μας ενδιαφερει η σειρα που θα απαντησω τις ερωτησεις
αρα $\binom{10}{7}$

παραδειγμα 6

Ποσες επιλογες εχει αν πρεπει να απαντησει σε <u>τουλαχιστον</u> τρεις απο τις πεντε ερωτησεις
↳ δηλ. απο 3 και πανω (εδω μεχρι 5)

1 2 3 4 5 || 6 7 8 9 10

3 απο τις 5 πρωτες <u>ΚΑΙ</u> 4 απο τις 5 δευτερες $\rightarrow \binom{5}{3} \times \binom{5}{4}$

4 απο τις 5 πρωτες <u>ΚΑΙ</u> 3 απο τις 5 δευτερες $\rightarrow \binom{5}{4} \times \binom{5}{3}$

5 απο τις 5 πρωτες <u>ΚΑΙ</u> 2 απο τις 5 δευτερες $\rightarrow \binom{5}{5} \times \binom{5}{2}$

Στο συνολο λοιπον εχω:

$$\binom{5}{3} \times \binom{5}{4} + \binom{5}{4} \times \binom{5}{3} + \binom{5}{5} \times \binom{5}{2}$$

Πολυωνυμικος Συντελεστης

① ② ③

Αριθμηση ειναι διαφορετικη

$3! = 6$

① ② ③

① ③ ②

③ ① ②

③ ② ①

② ① ③

② ③ ①

① ② ③

Τα θεωρω ως προς το χρωμα

Αρα δεν ειναι ενα προς ενα διαφορετικα. Ειναι κατα ομαδες διαφορετικα

① ② ③

② ① ③

② ③ ①

~~③ ① ②~~

Ειναι ιδια γιατι τα θελω ως προς το χρωμα δεν με νοιαζει η σειρα

Προταση

Εστω n-στοιχεια απο τα οποια k_1 κατηγοριας I, k_2 ειναι κατηγοριας II, ..., k_r ειναι κατηγοριας R με $k_1+k_2+\dots+k_r = n$ και $k_1, k_2, \dots, k_r, n \in \mathbb{N}$. Τοτε το πληθος των τροπων που τα n-στοιχεια τοποθετουνται σε γραμμη, σε σειρα, συμβολιζεται με

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} \text{ και ειναι } \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_r!}$$

Παραδειγμα

Ποσες λεξεις μπορω να κατασκευασω απο την αναμεταθεση των γραμματων της λεξης ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ

Δυνατες λεξεις ~~10!~~ γιατι το Α και το Τ υπαρχουν δυο φορες

$$\binom{10}{1\ 1\ 1\ 2\ 1\ 1\ 2\ 1} = \frac{10!}{2!\,2!}$$

Παρατηρηση

α) Γενικευση διωνυμου του Νευτωνα

$$(x_1+x_2+\ldots+x_r)^n = \sum_{\{k_1,\ldots,k_r:\, k_1+k_2+\ldots+k_r=n\}} \binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_r} x_1^{k_1}\cdot x_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot x_r^{k_r}$$

β) Απλες Αλγεβρικες πραξεις

$$\binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_r} = \binom{n}{k_1} \times \binom{n-k_1}{k_2} \times \ldots \times \binom{n-k_1-\ldots-k_{r-2}}{k_{r-1}} \times$$

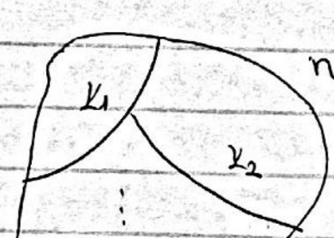
$$\times \binom{n-k_1-\ldots-k_{r-1}}{k_r} = \frac{n!}{k_1!\ldots k_r!}$$

$2^{η}$ χρηση πολυωνυμικου συντελεστη

Πληθος διαμερισεων n-στοιχειων σε r-ομαδες

$$\updownarrow$$

$$\binom{n}{k_1 \ldots k_2}$$



Παραδειγμα

8 στρατιωτες → 4 φυλακια

Ποσοι τροποι τοποθετησης υπαρχουν;

(α) χωρις κανεναν περιορισμο

(β) αν καθε φυλακιο πρεπει να παρει 2 στρατιωτες

ΛΥΣΗ

(α)
$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 \to 4 \\ \Delta_2 \to 4 \\ \vdots \\ \Delta_8 \to 4 \end{array}\right\} 4^8 \text{ τροποι}$$

(*) Δεν ειναι σωστο το 8^4 γιατι 4 φυλακια σε εναν στρατιωτη δεν γινεται.

με βαση τους στρατιωτες η κατανομη εγινε

(β) $\binom{8}{2} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2}$ τροποι

με την 2^{η} χρηση του πολυωνυμικου συντελεστη

$$\binom{8}{2\ \ 2\ \ 2\ \ 2}$$